

Testes de hipóteses: Uma visão geométrica

Erika Rayanne Fernandes da Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Centro de Ciências Exatas e da Terra - CCET
Departamento de Estatística - DEST
Programa de Educação Tutorial - PET
Seminário de Tópicos Especiais - STE

03 de agosto de 2016



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Teste de hipóteses
- 3 Verossimilhança
- 4 Estatísticas de teste e visão geométrica
- 5 Exemplo
- 6 Referências

Introdução

Inferência estatística constitui a operação através da qual as informações fornecidas pela amostra são usadas para tirar conclusões sobre características da população como um todo.

Teste de hipóteses

- O que é uma hipótese?

Dicionário online Aurélio

- 1 Suposição do que é possível (para do fato se tirar uma conclusão).
- 2 Teoria não demonstrada mas provável; suposição.

Teste de hipóteses

- Hipótese estatística:

Uma hipótese estatística é uma afirmação acerca dos parâmetros de uma população.

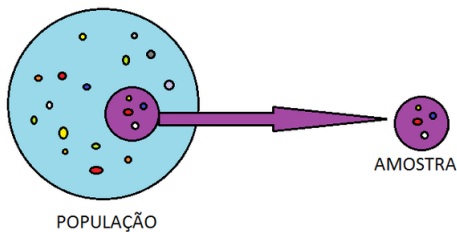
- Teste de hipóteses:

Um teste de hipóteses é um procedimento estatístico que permite averiguar se uma afirmação sobre a população é suportada ou não. A idéia é determinar se existem evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula.



Teste de hipóteses

A melhor maneira de determinar se uma hipótese estatística é verdadeira seria examinar toda a população. Como nem sempre isso é possível, geralmente se examina uma **amostra** aleatória da população.



Se os dados da amostra não forem consistentes com a hipótese, a hipótese é rejeitada.

Existem dois tipos de hipóteses estatísticas.

Hipótese nula:

A hipótese nula, denotada por H_0 , é a hipótese que está sob teste. É uma declaração sobre uma crença. Nós podemos duvidar que a hipótese nula é verdadeira e por isso que ela está sendo testada.

Hipótese alternativa:

A hipótese alternativa, denotada por H_1 ou H_a , é a hipótese de que as observações são influenciadas por alguma causa não-aleatória. A hipótese alternativa pode ser o que nós acreditamos ser verdade.

Não rejeitar H_0 pode ser um resultado ótimo se queremos continuar “acreditando” que ela é verdadeira. No entanto, não rejeitar pode ser um resultado desapontante e que possivelmente indica que não se tem informação suficiente dos dados para provar algo em rejeitar a hipótese nula.

Nível de significância

O procedimento de teste é construído tal que o risco de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira é pequeno. Esse risco, α , é muitas vezes referido como o **nível de significância do teste**. Quando rejeitamos H_0 em um teste com um nível de significância pequeno, temos maior garantia de que “provamos” algo e podemos acreditar no resultado.

Risco β

O risco de não rejeitar H_0 quando ela é falsa não pode ser fixado, mas pode ser determinado. Esse risco, β , é conhecido como **erro do tipo II**. Grandes desvios entre a realidade e a hipótese nula são facilmente detectados e levam a erros do tipo II menores. Quanto menor essa discrepância mais difícil é para detectar e isso traz um maior valor para β .

Região de Rejeição

Os valores críticos são valores que definem regiões onde a estatística de teste é pouco provável. Por exemplo, uma região onde o valor crítico é excedido com probabilidade α se a hipótese nula é verdadeira.

A hipótese nula é rejeitada se a estatística de teste encontra-se dentro desta região, que é muitas vezes chamada de **região de rejeição**.

Erros associados ao teste de hipóteses

		Situação	
		<i>H₀</i> verdadeira	<i>H₀</i> falsa
Decisão	Rejeitar <i>H₀</i>	Erro Tipo I	Sem erro
	Não rejeitar <i>H₀</i>	Sem erro	Erro Tipo II

$\alpha = P(\text{erro Tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) = \text{nível de significância}$

$\beta = P(\text{erro Tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$

$1 - \beta = 1 - P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = \text{poder do teste}$

Exemplo

Em muitas situações temos interesse em tomar a decisão de aceitar ou rejeitar determinada afirmação baseando-se em um conjunto de evidências.

Eficácia de uma vacina

Decidir sobre a eficiência ou não de certa vacina utilizada no combate à determinada doença. Os pesquisadores formulam então as hipóteses:
“**H0 : a vacina não é eficiente**” vs “**H1: a vacina é eficiente**”.

Erro tipo I: Dizer que a vacina é eficiente quando ela não é.

Erro tipo II: Dizer que a vacina não é eficiente quando ela é.

Teste de uma hipótese estatística é uma a função que leva à decisão de considerar uma das duas hipóteses como verdadeira.

Função de verossimilhança

A função de verossimilhança é uma função dos parâmetros de um modelo estatístico que permite inferir sobre o seu valor a partir de um conjunto de observações.

Definição: Verossimilhança

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim f(x|\theta)$, com $\theta \in \Theta$. A função de verossimilhança de θ correspondente à amostra observada $\mathbf{x}$ é dada por

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

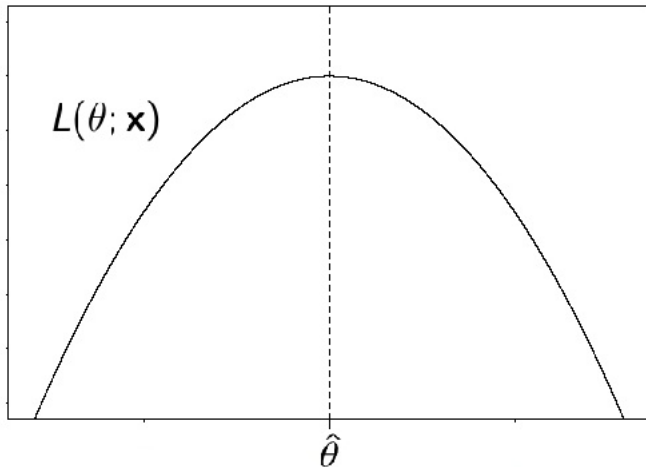
Estimativa de máxima verossimilhança

Um “estimador” é uma estatística (uma função da amostra que não depende do parâmetro) que é utilizada para inferir o valor de um parâmetro desconhecido em um modelo estatístico.

Definição: Estimativa de máxima verossimilhança

Estimativa de máxima verossimilhança de θ é o valor $\hat{\theta} \in \Theta$ que maximiza a função de verossimilhança $L(\theta; \mathbf{x})$.

Estimativa de máxima verossimilhança



Estimativa de máxima verossimilhança

Etapas

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \text{ (função de verossimilhança)}$$

$$\ell(\theta) = \log L(\theta; \mathbf{x}) \text{ (logaritmo neperiando)}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \log L(\theta; \mathbf{x})}{\partial \theta} = U(\theta) \text{ (Função escore)}$$

$$U(\hat{\theta}) = 0 \text{ (Ponto crítico)}$$

$$\frac{\partial U(\hat{\theta})}{\partial \theta} \text{ (Verifica-se é o ponto é máximo)}$$

Outros conceitos

Considerando a função escore

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \log L(\theta; \mathbf{x})}{\partial \theta} = U(\theta) \text{ (Função escore)}$$

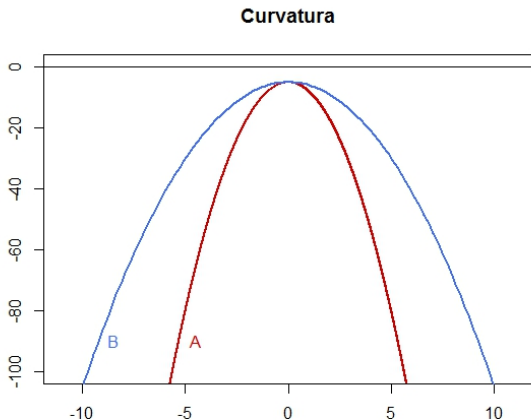
A informação de fisher é dada por

$$I_F(\theta) = E [U(\theta)^2]$$

é uma maneira de medir a quantidade de informação que a amostra aleatória traz sobre o parâmetro desconhecido θ .

De modo informal a curvatura de uma função $f(x)$ pode ser definida a partir de

$$C(x_0) = \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right| \text{ Avaliada em } x = x_0$$



Teste de hipóteses simples

Suponha que estamos interessados em testar as seguintes hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

As três estatísticas que são comumente utilizadas para a realização do teste são: a da razão de verossimilhança (LR), a estatística de Wald (W) e a escore de Rao (LM).

Visão geométrica

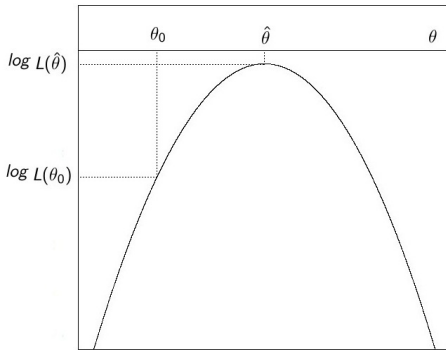
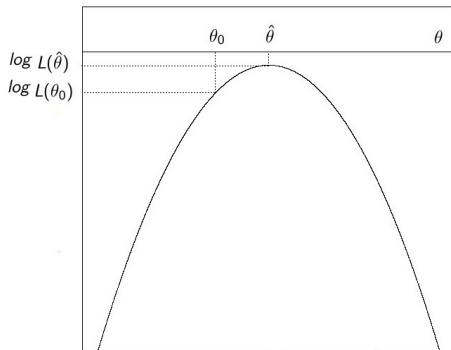
Considerações iniciais

- Se H_0 é verdadeira, espera-se que θ_0 seja bem próximo de $\hat{\theta}$;
- Quanto maior o valor de $L(\theta_0; x)$, mais verossímil será θ_0 ;
- Se $U(\theta_0)$ é igual ou próximo a zero, teremos evidências de que H_0 é verdadeira, já que θ_0 será igual ou próximo de $\hat{\theta}$, que é o estimador de máxima verossimilhança;
- Rejeitamos H_0 para valores grandes da estatística do teste.

Razão de verossimilhança

$$LR = 2 \left[\log L(\hat{\theta}) - \log L(\theta_0) \right]$$

Caso 1 Fixando a curvatura

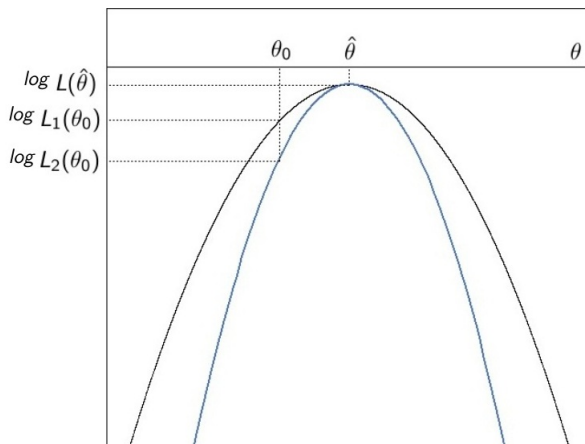


- Se H_0 é verdadeira, espera-se que θ_0 seja bem próximo de $\hat{\theta}$;

Razão de verossimilhança

$$LR = 2 \left[\log L(\hat{\theta}) - \log L(\theta_0) \right]$$

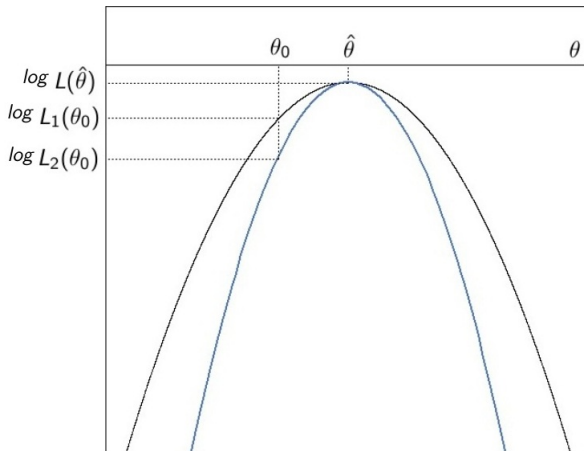
Caso 2 Fixando a distância entre $\hat{\theta}$ e θ_0



Wald

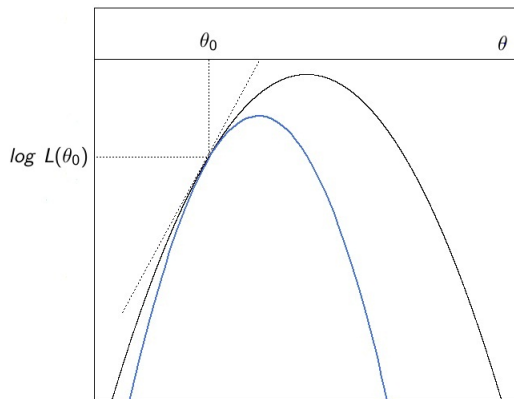
Grandes valores de $W = (\hat{\theta} - \theta_0)^2$ fornecem evidências para rejeitar a hipótese nula.

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 I(\hat{\theta})$$



Escore

$$LM = U(\theta_0)^2 I(\theta_0)^{-1}$$



Estatísticas de teste

- Razão de verossimilhança (LR):

$$LR = 2 \left[\log L(\hat{\theta}) - \log L(\theta_0) \right]$$

- Wald (W):

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 I(\hat{\theta})$$

- Escore de Rao (LM):

$$LM = U(\theta_0)^2 I(\theta_0)^{-1}$$

Sob H_0 , as três estatísticas possuem distribuição assintoticamente $\chi^2_{(1)}$.

Exemplo

Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de $X_i \sim N(\mu, 1)$. Queremos testar as hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Para este caso temos que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2} \right\}$$

Exemplo

$$L(\mu|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \mu)^2}{2} \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2} \right\}$$

Exemplo

$$L(\mu|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-(x_i - \mu)^2}{2} \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2} \right\}$$

$$\ell(\mu) = \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2}$$

Exemplo

$$L(\mu|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-(x_i - \mu)^2}{2} \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2} \right\}$$

$$\ell(\mu) = \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2} \quad U(\mu) = \sum (x_i - \mu)$$

Exemplo

$$L(\mu|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-(x_i - \mu)^2}{2} \right\} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \exp \left\{ \frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2} \right\}$$

$$\ell(\mu) = \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2} \quad U(\mu) = \sum (x_i - \mu) \quad \hat{\mu} = \bar{X}$$

Desta forma temos que $\bar{X}$ é o estimador de máxima verossimilhança para μ .

Exemplo

- Estatística da razão de verossimilhança

$$LR = 2 [\log L(\hat{\mu}) - \log L(\mu_0)]$$

Exemplo

- Estatística da razão de verossimilhança

$$LR = 2 [\log L(\hat{\mu}) - \log L(\mu_0)]$$

$$\Rightarrow LR = 2 \left\{ \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} - \left[\frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{2} \right] \right\}$$

Exemplo

- Estatística da razão de verossimilhança

$$LR = 2 [\log L(\hat{\mu}) - \log L(\mu_0)]$$

$$\Rightarrow LR = 2 \left\{ \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} - \left[\frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{2} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (x_i - \mu_0)^2$$

Exemplo

- Estatística da razão de verossimilhança

$$LR = 2 [\log L(\hat{\mu}) - \log L(\mu_0)]$$

$$\Rightarrow LR = 2 \left\{ \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} - \left[\frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{2} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) + \sum (x_i^2 - 2x_i\mu_0 + \mu_0^2)$$

Exemplo

- Estatística da razão de verossimilhança

$$LR = 2 [\log L(\hat{\mu}) - \log L(\mu_0)]$$

$$\Rightarrow LR = 2 \left\{ \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} - \left[\frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{2} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) + \sum (x_i^2 - 2x_i\mu_0 + \mu_0^2)$$

$$\Rightarrow LR = -\sum x_i^2 + 2n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2 + \sum x_i^2 - 2\mu_0 n\bar{x} + n\mu_0^2$$

Exemplo

- Estatística da razão de verossimilhança

$$LR = 2 [\log L(\hat{\mu}) - \log L(\mu_0)]$$

$$\Rightarrow LR = 2 \left\{ \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} - \left[\frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{2} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) + \sum (x_i^2 - 2x_i\mu_0 + \mu_0^2)$$

$$\Rightarrow LR = -\sum x_i^2 + 2n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2 + \sum x_i^2 - 2\mu_0 n\bar{x} + n\mu_0^2$$

$$\Rightarrow LR = n(2\bar{x}^2 - \bar{x}^2 - 2\mu_0\bar{x} + \mu_0^2)$$

Exemplo

- Estatística da razão de verossimilhança

$$LR = 2 [\log L(\hat{\mu}) - \log L(\mu_0)]$$

$$\Rightarrow LR = 2 \left\{ \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} - \left[\frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2\pi} \right) - \frac{\sum (x_i - \mu_0)^2}{2} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (x_i - \mu_0)^2$$

$$\Rightarrow LR = -\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) + \sum (x_i^2 - 2x_i\mu_0 + \mu_0^2)$$

$$\Rightarrow LR = -\sum x_i^2 + 2n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2 + \sum x_i^2 - 2\mu_0 n\bar{x} + n\mu_0^2$$

$$\Rightarrow LR = n(2\bar{x}^2 - \bar{x}^2 - 2\mu_0\bar{x} + \mu_0^2)$$

$$\Rightarrow LR = n(\bar{x} - \mu_0)^2$$

Exemplo

Sabendo que $I(\hat{\mu}) = E[-U'(\hat{\mu})] = n$, temos

- Estatística Wald

$$W = (\hat{\mu} - \mu_0)^2 I(\hat{\mu})$$

$$\Rightarrow W = n(\bar{X} - \mu_0)^2$$

Exemplo

- Escore de Rao

$$LM = U(\mu_0)^2 I(\mu_0)^{-1}$$

$$\Rightarrow LM = (n\bar{x} - n\mu_0)^2 n^{-1}$$

$$\Rightarrow LM = n(\bar{x} - \mu_0)^2$$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Teste de hipóteses
- 3 Verossimilhança
- 4 Estatísticas de teste e visão geométrica
- 5 Exemplo
- 6 Referências



Referências

-  *BOLFARINE, Heleno; SANDOVAL, Mônica Carneiro. Introdução à inferência estatística. SBM, 2001.*
-  *BUSE, Adolf. The likelihood ratio, Wald, and Lagrange multiplier tests: An expository note. The American Statistician, v. 36, n. 3a, p. 153-157, 1982.*
-  *Testing statistical hypothesis. Disponível em:*
<<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section1/prc14.htm>>.
Acesso em: 06 de junho de 2016