

Minicurso - Cálculo Diferencial e Integral I

3ª Parte - Derivada

Francisco Felipe de Queiroz
Rodrigo Matheus Rocha de Medeiros

Centro de Ciências Exatas e da Terra
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Departamento de Estatística
PET - Programa de Educação Tutorial

10 de agosto de 2015



Contents

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas
- 6 Exercitando...
- 7 Referências Bibliográficas

Sumário

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas
- 6 Exercitando...
- 7 Referências Bibliográficas

Função derivada

Função derivada

A **derivada** de uma função $y = f(x)$ em relação a variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista.

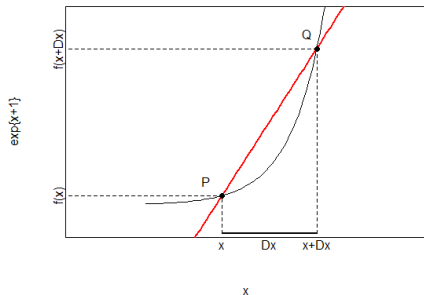
A **reta tangente** a curva $y = f(x)$ em $P(x_0, f(x_0))$ é a reta $y = g(x)$ que passa por P e tem coeficiente angular $f'(x_0)$.

Retas tangentes e derivadas

Sejam dois pontos

$$Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) \text{ e } P(x, f(x))$$

Considere uma curva C e uma reta, $y = f(x)$, que é secante a C . Suponha que y intercepte C em P e Q , como representado o lado.



Qual o coeficiente angular de y ?

Sabemos que y é da forma

$$y = ax + b$$

Pela definição,

$$a = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

No entanto, queremos encontrar o coeficiente angular de uma reta **tangente** a C .

O que aconteceria se diminuíssemos Δx ?

Sumário

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas
- 6 Exercitando...
- 7 Referências Bibliográficas

Um pouco de história...

“A diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes e curvas e de questões que buscavam determinar máximos e mínimos de funções, na Grécia Antiga, porém a primeira manifestação clara do método diferencial data de 1629.” (EVES, 2004)

Newton observa que o problema de determinar a tangente em um de seus pontos, e o cálculo da área delimitado por uma curva são, na verdade, problemas inversos. A partir disso, surge as operações inversas Integração e Diferenciação. Vale salientar que há contradições entre os historiadores quanto a percepção deste fato.

Sumário

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação**
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas
- 6 Exercitando...
- 7 Referências Bibliográficas

Diferenciabilidade e continuidade

Teorema 1: Diferenciabilidade implica continuidade

Se f tem derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$

CUIDADO! A recíproca do Teorema 1 é falsa.

Teorema do Valor Intermediário

Teorema 2: Teorema do Valor Intermediário

Seja a função f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(a) \neq f(b)$. Então, se k é qualquer número real estritamente entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um número c , estritamente entre a e b tal que $f(c) = k$.

Esse teorema nos ajuda a verificar se existem “zeros” de funções em intervalos fechados. Suponha, para isso, $k = 0$.

Teorema de Rolle

Teorema 3: Teorema de Rolle

Suponha que a função $f(x)$ é contínua em todos os pontos de $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de (a, b) . Se

$$f(a) = f(b) = 0$$

Então há pelo menos um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Sumário

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas
- 6 Exercitando...
- 7 Referências Bibliográficas

Teste da Primeira Derivada para Crescimento e Decrescimento

Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) .

Crescimento e Decrescimento

- Se $f'(x) > 0$ em todos os pontos de (a, b) , então f é crescente em $[a, b]$;
- Se $f'(x) < 0$ em todos os pontos de (a, b) , então f é decrescente em $[a, b]$;

Teste de Derivadas para Extremos Locais

Suponha que f'' seja definida e contínua em (a, b) e considere um ponto c pertencente ao intervalo.

Máximos e Mínimos

- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f possui um máximo local quando $x = c$;
- Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f possui um mínimo local quando $x = c$;

Ponto de Inflexão

Um ponto $(c, f(c))$ é denominado *ponto de inflexão* do gráfico de uma função f se o gráfico tiver uma reta tangente nesse ponto e se houver um intervalo I contendo o ponto c , tal que, para todo par de números reais a e b em I , com $a < c < b$, $f''(a)$ e $f''(b)$ possuem sinais algébricos diferentes. Se $(c, f(c))$ é ponto de inflexão, então

$$f''(c) = 0$$

Máximos e Mínimos em Intervalos Fechados

Teorema 4: Teorema do valor extremo

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume tanto um valor máximo M como um valor mínimo m em $[a, b]$. Ou seja, há números x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer outro valor de x em $[a, b]$.

Sumário

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas**
- 6 Exercitando...
- 7 Referências Bibliográficas

Limites de funções racionais

Teorema 5: Regra de L'Hôpital

Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e que $g'(x) \neq 0$ em I se $x \neq a$.

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que exista o limite no lado direito da igualdade.

Sumário

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas
- 6 Exercitando...**
- 7 Referências Bibliográficas

Exemplo

- 1 Utilizando os conhecimentos de Limite e derivada, construa o gráfico da função

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

- 2 **Demonstração Limite Fundamental:** Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Distribuição Normal: Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Em que $\mu(-\infty < \mu < \infty)$ e $\sigma^2(\sigma^2 > 0)$ são parâmetros dessa função.

- 1 $f(x)$ tem ponto de máximo? Qual?
- 2 Mostre que $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$ são pontos de inflexão de f .
- 3 Determine o intervalo de crescimento e de decrescimento de f .

Sumário

- 1 Definição
 - Retas tangentes e derivadas
- 2 Um pouco de história...
- 3 Derivação
- 4 Testes de Derivadas
- 5 Limites-Formas Indeterminadas
- 6 Exercitando...
- 7 Referências Bibliográficas**

Referências

-  THOMAS, G.B. Cálculo, vol. 1. 10.ed. São Paulo, Addison-Wesley/Pearson, 2002.
-  MAKEAGIF. Make A Gif. Disponível em: <<http://makeagif.com/>>. Acesso em: 20 jul. 2015.
-  R Core Team (2014). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>.
-  RAMOS, Iloneide Carlos de Oliveira. Aulas práticas de introdução ao R. 02 feb. 2015, 20 jun. 2015. Notas de Aula.
-  STEWART, JAMES: Cálculo. Vol. 1, 5a ed., Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2008.