

Introdução a Estatística e Probabilidade

Erika Rayanne Fernandes da Silva
Lucas de Oliveira Ferreira de Sales

Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN
Centro de Ciências Exatas e da Terra-CCET
Departamento de Estatística-DEST
Programa de Educação Tutorial- PET

10 e 11 de Agosto de 2015



Sumário

- 1 Conceito iniciais
 - Experimentos aleatórios
 - Espaço amostral
 - Eventos
- 2 Teorias de probabilidade
 - Abordagem clássica
 - Abordagem Frequentista
 - Abordagem Axiomática
- 3 Análise combinatória
 - Princípio Fundamental da Contagem
 - Permutação
 - Arranjo
 - Combinação
- 4 Exercícios
- 5 Refêrencias

Experimentos aleatórios

São experimentos que repetidos em condições iguais não reproduzem sempre o mesmo resultado. Porém embora não sejamos capazes de afirmar qual será exatamente o resultado deste experimento, podemos descrever o conjunto de todas os possíveis resultados.

Experimentos aleatórios

São experimentos que repetidos em condições iguais não reproduzem sempre o mesmo resultado. Porém embora não sejamos capazes de afirmar qual será exatamente o resultado deste experimento, podemos descrever o conjunto de todas os possíveis resultados.

Exemplos :

1- Número de coroas em N lançamentos de uma moeda.

Experimentos aleatórios

São experimentos que repetidos em condições iguais não reproduzem sempre o mesmo resultado. Porém embora não sejamos capazes de afirmar qual será exatamente o resultado deste experimento, podemos descrever o conjunto de todas os possíveis resultados.

Exemplos :

- 1- Número de coroas em N lançamentos de uma moeda.
- 2- Resultado de uma partida de futebol.

Espaço amostral

Podemos definir como o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Espaço amostral

Podemos definir como o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos:

Experimento 1: Perguntar aos alunos se eles são bolsistas de algum projeto do curso de estatística.

Espaço amostral

Podemos definir como o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos:

Experimento 1: Perguntar aos alunos se eles são bolsistas de algum projeto do curso de estatística.

$$\Omega_1 = \{Sim, Nao\}$$

Espaço amostral

Podemos definir como o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos:

Experimento 1: Perguntar aos alunos se eles são bolsistas de algum projeto do curso de estatística.

$$\Omega_1 = \{Sim, Nao\}$$

Experimento 2: Os possíveis resultados do lançamento de 2 moedas.

Espaço amostral

Podemos definir como o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos:

Experimento 1: Perguntar aos alunos se eles são bolsistas de algum projeto do curso de estatística.

$$\Omega_1 = \{Sim, Nao\}$$

Experimento 2: Os possíveis resultados do lançamento de 2 moedas.

$$\Omega_2 = \{cc, ck, kc, kk\}$$

Eventos

Evento pode ser definido como um subconjunto do seu espaço amostral, como nos exemplos a seguir:

Evento 1 : A_1 {Ser bolsista de um projeto do curso de estatística.}

Eventos

Evento pode ser definido como um subconjunto do seu espaço amostral, como nos exemplos a seguir:

Evento 1 : A_1 {Ser bolsista de um projeto do curso de estatística.}

Evento 2 : A_2 {Cair cara no lançamento de uma moeda.}

Propriedades

- União de eventos:

Para quaisquer dois eventos E e F de um espaço amostral Ω , definimos o novo evento $E \cup F$ como sendo formado por todos os resultados que pertencem a E ou F ou a E e F simultaneamente. Isto é, o evento $E \cup F$ ocorrerá se E ou F ocorrer. Por exemplo, se o evento $E = \{g\}$ e $F = \{b\}$, então

Propriedades

- União de eventos:

Para quaisquer dois eventos E e F de um espaço amostral Ω , definimos o novo evento $E \cup F$ como sendo formado por todos os resultados que pertencem a E ou F ou a E e F simultaneamente. Isto é, o evento $E \cup F$ ocorrerá se E ou F ocorrer. Por exemplo, se o evento $E = \{g\}$ e $F = \{b\}$, então

$$E \cup F = \{g, b\}$$

Propriedades

- União de eventos:

Se $E = \{(C, C), (C, K)\}$ e $F = \{(K, C), (C, C)\}$, então

Propriedades

- União de eventos:

Se $E = \{(C, C), (C, K)\}$ e $F = \{(K, C), (C, C)\}$, então

$$E \cup F = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$$

Propriedades

- União de eventos:

Se $E = \{(C, C), (C, K)\}$ e $F = \{(K, C), (C, C)\}$, então

$$E \cup F = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$$

$A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$ representa o evento em que ao menos um dos A_i ocorre.

Propriedades

- Interseção de eventos:

De forma similar, para quaisquer dois eventos E e F , também podemos definir o novo evento $E \cap F$, chamado de interseção de E e F , como sendo formado por todos os resultados que estão tanto em E quanto em F . Isto é, o evento $E \cap F$ ocorre apenas se E e F ocorrerem.

Propriedades

- Interseção de eventos:

Por exemplo, se $E = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$ é o evento em que pelo menos uma cara aparece nas duas moedas e $F = \{(C, K), (K, C), (K, K)\}$ é o evento em que pelo menos uma coroa aparece, então

Propriedades

- Interseção de eventos:

Por exemplo, se $E = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$ é o evento em que pelo menos uma cara aparece nas duas moedas e $F = \{(C, K), (K, C), (K, K)\}$ é o evento em que pelo menos uma coroa aparece, então

$$E \cap F = \{(C, K), (K, C)\}$$

é o evento em que exatamente uma cara e uma coroa aparecem.

Propriedades

- Interseção de eventos:

Por exemplo, se $E = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$ é o evento em que pelo menos uma cara aparece nas duas moedas e $F = \{(C, K), (K, C), (K, K)\}$ é o evento em que pelo menos uma coroa aparece, então

$$E \cap F = \{(C, K), (K, C)\}$$

é o evento em que exatamente uma cara e uma coroa aparecem.

$A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n$ representa o evento em que todos os A_i ocorrem.

Propriedades

- Evento complementar

Para qualquer evento E , definimos o novo evento E^c , chamado de complemento de E , como o evento formado por todos os resultados do espaço amostral que não estão contidos em E . Note que se o evento $E = \{(1, 6)(2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, então E^c ocorre quando a soma dos dados não for igual a 7. Como o experimento deve levar a algum resultado, tem-se que $\Omega^c = \phi$.

Propriedades

- Relação de inclusão

Para quaisquer dois eventos E e F , se todos os resultados em E também estiverem em F , dizemos que E está contido em F , ou que E é um subconjunto de F , e escrevemos $E \subset F$. Assim, se $E \subset F$, então a ocorrência de E implica a ocorrência de F . Se $E \subset F$ e $F \subset E$, dizemos que E e F são iguais e escrevemos $E = F$.

Diagrama de Venn

O espaço amostral Ω é representado como um grande retângulo e os eventos $A, B, C, \dots$ são representados como todos os resultados presentes no interior de círculos colocados dentro desse retângulo. Eventos de interesse podem então ser indicados sombreando-se as regiões apropriadas do diagrama.

Diagrama de Venn

O Diagrama de Venn abaixo mostra a **união** dos eventos A e B

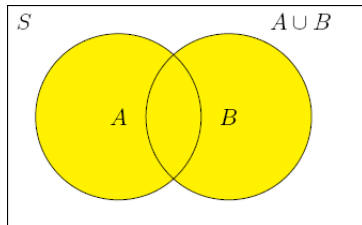


Diagrama de Venn

O Diagrama de Venn abaixo mostra a **interseção** dos eventos A e B

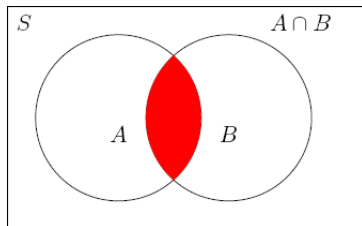


Diagrama de Venn

A área destacada no Diagrama de Venn abaixo mostra o **evento complementar** de A

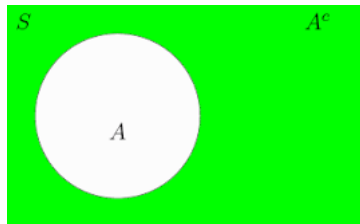
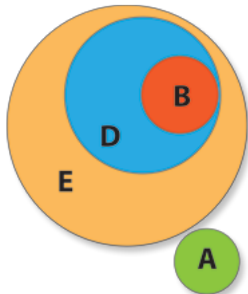


Diagrama de Venn

O Diagrama de Venn abaixo mostra que $B \subset D \subset E$ e que A e E são independentes



Operações entre eventos

As operações de formação de uniões, interseções e complementos de eventos obedecem a certas regras similares às regras de álgebra. Listamos algumas destas regras:

- Leis comutativas

$$E \cup F = F \cup E$$

Operações entre eventos

As operações de formação de uniões, interseções e complementos de eventos obedecem a certas regras similares às regras de álgebra. Listamos algumas destas regras:

- Leis comutativas

$$E \cup F = F \cup E$$

$$E \cap F = F \cap E$$

Operações entre eventos

As operações de formação de uniões, interseções e complementos de eventos obedecem a certas regras similares às regras de álgebra. Listamos algumas destas regras:

- Leis comutativas

$$E \cup F = F \cup E$$

$$E \cap F = F \cap E$$

- Leis associativas

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$$

Operações entre eventos

As operações de formação de uniões, interseções e complementos de eventos obedecem a certas regras similares às regras de álgebra. Listamos algumas destas regras:

- Leis comutativas

$$E \cup F = F \cup E$$

$$E \cap F = F \cap E$$

- Leis associativas

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$$

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$$

Operações entre eventos

- Leis distributivas

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$

Operações entre eventos

- Leis distributivas

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$

$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$$

Operações entre eventos

- Leis distributivas

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$

$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$$

- Leis de DeMorgan:

$$(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n)^c = (A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c)$$

$$(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n)^c = (A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c)$$

Sumário

- 1 Conceito iniciais
 - Experimentos aleatórios
 - Espaço amostral
 - Eventos
- 2 Teorias de probabilidade
 - Abordagem clássica
 - Abordagem Frequentista
 - Abordagem Axiomática
- 3 Análise combinatória
 - Princípio Fundamental da Contagem
 - Permutação
 - Arranjo
 - Combinação
- 4 Exercícios
- 5 Refêrencias

Abordagem Clássica

Seja um espaço amostral finito, formado por n eventos elementares, igualmente prováveis. Seja A um evento de Ω com m eventos simples. Então a probabilidade de A é a fração:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Exemplo

Um dado equilibrado é lançado e desejamos obter a probabilidade de ocorrência de um número ímpar.

Exemplo

Um dado equilibrado é lançado e desejamos obter a probabilidade de ocorrência de um número ímpar.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Exemplo

Um dado equilibrado é lançado e desejamos obter a probabilidade de ocorrência de um número ímpar.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

Exemplo

Um dado equilibrado é lançado e desejamos obter a probabilidade de ocorrência de um número ímpar.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Propriedades

FATO: De acordo com a definição acima $P(A)$ satisfaz

1. $P(A) \geq 0$;
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se $A \cap B = \phi$;
3. $P(\Omega) = 1$

Abordagem Frequentista

Abordagem Frequentista

- Frequência relativa: $f_{n,A}$
- Repetir o experimento “n”vezes (em condições iguais)
- Anotar quantas vezes A ocorre: $n(A)$
- $f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$

Abordagem Frequentista

Podemos definir $P(A)$ como o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes de um experimento, com n tendendo ao infinito, ou seja dizemos que

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Exemplos

Exemplo 1.

Considere uma certa moeda cuja probabilidade de ocorrência de “cara” é desconhecida. Para se obter essa probabilidade, esta moeda é submetida a n repetições independentes de cada lançamento. A tabela a seguir mostra os resultados obtidos.

Exemplos

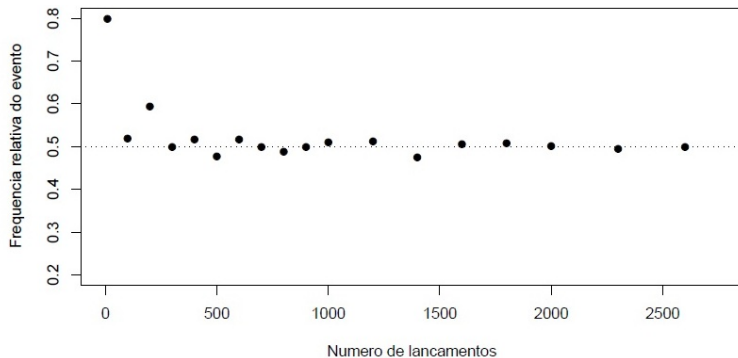
Exemplo 1.

Considere uma certa moeda cuja probabilidade de ocorrência de “cara” é desconhecida. Para se obter essa probabilidade, esta moeda é submetida a n repetições independentes de cada lançamento. A tabela a seguir mostra os resultados obtidos.

n	10	100	200	...	2300	2600
$f_{n,A}$	0,800	0,520	0,595	...	0,496	0,499

Exemplos

Representação Gráfica



Propriedades

FATO: A frequência relativa $f_{n,A}$ satisfaz

1. $0 \leq f_{n,A} \leq 1$;
2. $f_{n,A \cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$, se $A \cap B = \phi$;
3. $P(f_{n,\Omega}) = 1$

Abordagem Axiomática

Abordagem Axiomática

Seja ε um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a este experimento. Associamos a cada evento $A (A \subset \Omega)$, um número real representado por $P(A)$ e denominado “probabilidade de A ”, satisfazendo as seguintes condições:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se $A \cap B = \phi$
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Abordagem Axiomática

Propriedades

- i. $P(\phi) = 0$;
- ii. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- iii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- iv. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Sumário

- 1 Conceito iniciais
 - Experimentos aleatórios
 - Espaço amostral
 - Eventos
- 2 Teorias de probabilidade
 - Abordagem clássica
 - Abordagem Frequentista
 - Abordagem Axiomática
- 3 **Análise combinatória**
 - **Princípio Fundamental da Contagem**
 - **Permutação**
 - **Arranjo**
 - **Combinação**
- 4 Exercícios
- 5 Refêrencias

Análise combinatória

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo que esses elementos são agrupamentos formados sob certas condições.

Os agrupamentos a serem estudados dividem-se em Permutações, Arranjos e Combinações.

Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem nos diz que sempre devemos multiplicar os números de opções entre as escolhas que podemos fazer.

Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem nos diz que sempre devemos multiplicar os números de opções entre as escolhas que podemos fazer.

Por exemplo, para montar um computador, temos 3 diferentes tipos de monitores, 4 tipos de teclados, 2 tipos de impressora e 3 tipos de "CPU". Para saber o numero de diferentes possibilidades de computadores que podem ser montados com essas peças, somente multiplicamos as opções:

$$3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$$

Análise combinatória

Seleção do método de contagem apropriado		
	Ordem importa	Ordem não importa
Com repetição	N^n	-
Sem repetição	$\frac{N!}{(N-n)!}$	$\frac{N!}{n!(N-n)!}$

Permutação

Quando formamos agrupamentos com N elementos, de forma que os N elementos sejam distintos entre si pela ordem. As permutações podem ser simples ou com repetições.

A fórmula da permutação é dada por :

Permutação

Quando formamos agrupamentos com N elementos, de forma que os N elementos sejam distintos entre si pela ordem. As permutações podem ser simples ou com repetições.

A fórmula da permutação é dada por :

$$N!$$

Arranjo

Se A é um conjunto com N elementos, as sucessões com n elementos distintos, escolhidos em A , constituem agrupamentos que são chamados arranjos dos N elementos de A , n a n . Nos arranjos, os agrupamentos diferem entre si apenas pela ordem de seus elementos.

Exemplo 2: Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$, os arranjos dos 4 elementos de A , 3 a 3, são as seguintes sucessões com 3 elementos:

$(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1)$
 $(1, 3, 7), (1, 7, 3), (3, 1, 7), (3, 7, 1), (7, 1, 3), (7, 3, 1)$
 $(1, 5, 7), (1, 7, 5), (5, 1, 7), (5, 7, 1), (7, 1, 5), (7, 5, 1)$
 $(3, 5, 7), (3, 7, 5), (5, 3, 7), (5, 7, 3), (7, 3, 5), (7, 5, 3).$

Arranjo

Se A é um conjunto com N elementos, as sucessões com n elementos distintos, escolhidos em A , constituem agrupamentos que são chamados arranjos dos N elementos de A , n a n . Nos arranjos, os agrupamentos diferem entre si apenas pela ordem de seus elementos.

Exemplo 2: Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$, os arranjos dos 4 elementos de A , 3 a 3, são as seguintes sucessões com 3 elementos:

$(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1)$
 $(1, 3, 7), (1, 7, 3), (3, 1, 7), (3, 7, 1), (7, 1, 3), (7, 3, 1)$
 $(1, 5, 7), (1, 7, 5), (5, 1, 7), (5, 7, 1), (7, 1, 5), (7, 5, 1)$
 $(3, 5, 7), (3, 7, 5), (5, 3, 7), (5, 7, 3), (7, 3, 5), (7, 5, 3).$

$$A_n^N = \frac{N!}{(N - n)!}$$

Combinação

Seja A um conjunto com N elementos. Os subconjuntos de A com n elementos constituem agrupamentos que são chamados combinações dos N elementos de A , n a n . Nas combinações, os agrupamentos diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos.

Combinação

Seja A um conjunto com N elementos. Os subconjuntos de A com n elementos constituem agrupamentos que são chamados combinações dos N elementos de A , n a n . Nas combinações, os agrupamentos diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos.

Exemplo 1: Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$, são combinações dos 4 elementos de A , 3 a 3, os agrupamentos:

Combinação

Seja A um conjunto com N elementos. Os subconjuntos de A com n elementos constituem agrupamentos que são chamados combinações dos N elementos de A , n a n . Nas combinações, os agrupamentos diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos.

Exemplo 1: Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$, são combinações dos 4 elementos de A , 3 a 3, os agrupamentos:

$$\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{3, 5, 7\} \text{ e } \{1, 5, 7\}$$

Combinação

Seja A um conjunto com N elementos. Os subconjuntos de A com n elementos constituem agrupamentos que são chamados combinações dos N elementos de A , n a n . Nas combinações, os agrupamentos diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos.

Exemplo 1: Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$, são combinações dos 4 elementos de A , 3 a 3, os agrupamentos:

$$\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{3, 5, 7\} \text{ e } \{1, 5, 7\}$$

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N - n)!}$$

Sumário

- 1 Conceito iniciais
 - Experimentos aleatórios
 - Espaço amostral
 - Eventos
- 2 Teorias de probabilidade
 - Abordagem clássica
 - Abordagem Frequentista
 - Abordagem Axiomática
- 3 Análise combinatória
 - Princípio Fundamental da Contagem
 - Permutação
 - Arranjo
 - Combinação
- 4 Exercícios
- 5 Refêrências

Exercícios

Abaixo estão alguns dos exercícios que foram resolvidos neste minicurso.

1. Verifique que $P[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
2. Mostre que se $P(A^c) = a$ e $P(B^c) = b$, então $P(A \cap B) \geq 1 - a - b$
3. Se $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B^c) = \frac{1}{4}$ os eventos A e B pode ser disjuntos?
4. Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de cada emblema é anotado.
 - (a) Qual a probabilidade de que o menor número de emblema seja 5?
 - (b) Qual a probabilidade de que o maior número de emblema seja 5?

Exercícios

5. Suponha que três dígitos 1,2 e 3 sejam escritos em ordem aleatória.
(a) Qual a probabilidade de que ao menos um dígito ocupe o seu lugar próprio?
6. João, Júlio, Jonas e Jacques formaram uma banda com quatro instrumentos. Se cada um dos garotos é capaz de tocar todos os instrumentos, quantas diferentes combinações são possíveis? R. 24
E se João e Júlio souberem tocar todos os quatro instrumentos, mas Jonas e Jacques souberem tocar cada um deles apenas o piano e a bateria? R. 4

Exercícios

7. (a) De quantas maneiras diferentes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila?
- (b) De quantas maneiras diferentes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila se os garotos e as garotas sentarem-se juntos?
- (c) E se apenas os garotos sentarem-se juntos?
- (d) E se duas pessoas do mesmo sexo não puderem se sentar juntas?

Revisem os conceitos, refaçam os exercícios e tirem dúvidas enquanto há tempo.

Boa sorte a todos! :D

Referências



*ROSS, S. tradutor: Alberto Resende De Conti. **Probabilidade : Um Curso Moderno Com Aplicações**. 8ed. Porto Alegre: Bookman, 2010*



NOTAS DE AULA, INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE, Dione Maria Valença, DEST/CCET/UFRN